

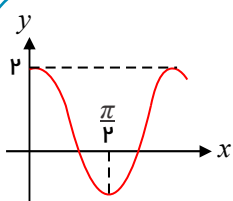


دبیرستان هاشمی نژاد ۱

مجموعه تست مثلثات ۳



مدرس: مسعود یکتا



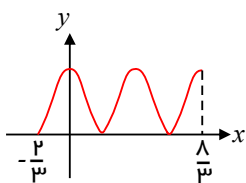
۱ اگر نمودار تابع $y = a \cos bx$ به صورت روبه‌رو باشد، کدام مقدار برای $a + b$ ممکن است؟

۲ (۲)

۳ (۱)

۴ (۴)

۶ (۳)



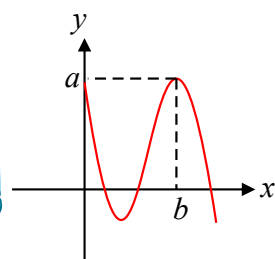
۲ شکل مقابل نمودار تابع $f(x) = 3 + a \cos(b\pi x)$ است، حاصل $(a + 2b)$ برابر با کدام گزینه می‌تواند باشد؟

-۳ (۲)

۳ (۱)

۶ (۴)

-۶ (۳)



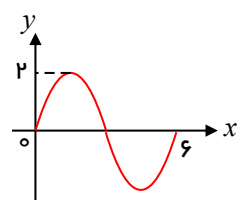
۳ اگر نمودار $y = \cos^2 x - \sin^2 x$ به شکل مقابل باشد، دوتایی (a, b) کدام گزینه خواهد بود؟

(۲, ۲pi) (۱)

(۱, ۲pi) (۲)

(۲, pi) (۳)

(۱, pi) (۴)



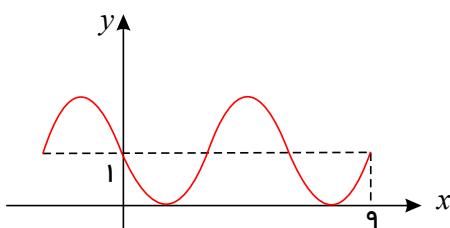
۴ شکل روبه‌رو قسمتی از نمودار تابع $y = a \sin(b\pi x)$ است. $a + b$ کدام است؟

5/3 (۲)

4/3 (۱)

8/3 (۴)

7/3 (۳)



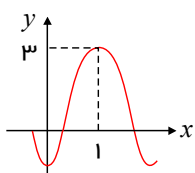
۵ نمودار زیر مربوط به تابع $y = a + \cos(-\frac{1}{2} + bx)\pi$ می‌باشد. حاصل $f(29)$ کدام است؟

$1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$ (۲)

$1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$ (۱)

3/2 (۴)

1/2 (۳)



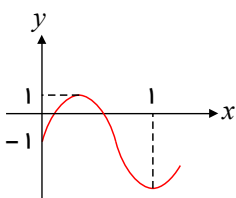
۶ اگر قسمتی از نمودار تابع $y = 1 + a \cos b\pi x$ به صورت مقابل باشد، a کدام است؟

۲ (۲)

-۲ (۱)

-۳ (۴)

-۱ (۳)



۷ شکل مقابل قسمتی از نمودار تابع $y = a \sin b\pi x - 1$ است. مقدار $a + b$ کدام می‌تواند باشد؟

۳ (۲)

۲٫۵ (۱)

۴ (۴)

۳٫۵ (۳)



۸ اگر در یک دایره، اندازه‌ی کمان مقابل به زاویه‌ی مرکزی $\theta = 50^\circ$ برابر ۱۰ سانتی متر باشد، مساحت این دایره چند برابر محیط آن است؟

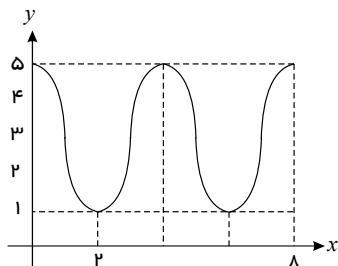
۴ $\frac{36}{\pi}$

۳ $\frac{18}{\pi}$

۲ $\frac{1}{10}$

۱ $\frac{1}{50}$

۹ نمودار معادله‌ی $y = a \cos b\pi x + 3$ مطابق شکل زیر است؛ حاصل $a + b$ کدام گزینه می‌تواند باشد؟



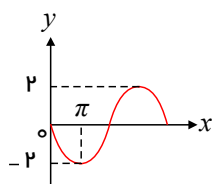
۲ $\frac{7}{2}$

۴ ۱

۱ $\frac{5}{2}$

۳ $\frac{9}{2}$

۱۰ اگر نمودار تابع با ضابطه‌ی $y = b \cos(\frac{3\pi}{2} + ax)$ به صورت زیر باشد، ab کدام است؟ ($a > 0$)



۴ ۱

۳ $-\frac{3}{2}$

۲ -۱

۱ -۲

۱۱ دوره‌ی تناوب اصلی تابع $f(x) = \cos^4 x - \sin^4 x$ کدام است؟

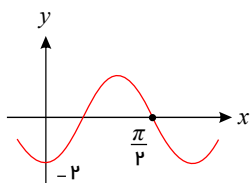
۴ $\frac{\pi}{4}$

۳ $\frac{\pi}{2}$

۲ π

۱ 2π

۱۲ شکل زیر، نمودار تابع $f(x) = a \sin(bx + \frac{\pi}{4})$ است. مقدار $f(\frac{\pi}{12})$ کدام است؟



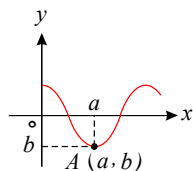
۲ $2\sqrt{2}$

۴ $-2\sqrt{2}$

۱ $\sqrt{2}$

۳ $-\sqrt{2}$

۱۳ اگر قسمتی از نمودار تابع $y = 1 - 2\sin^2 x$ به صورت زیر باشد، مقدار $a \times b$ کدام است؟



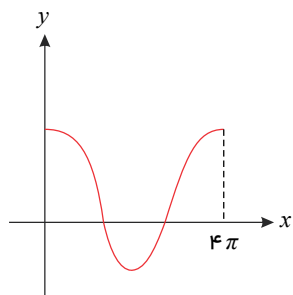
۲ $-\pi$

۴ $-\frac{\pi}{2}$

۱ π

۳ $\frac{\pi}{2}$

۱۴ شکل روبه‌رو قسمتی از نمودار تابع $y = \frac{1}{4} + 2 \cos mx$ است. مقدار تابع در نقطه‌ای به طول $x = \frac{16\pi}{3}$ کدام است؟



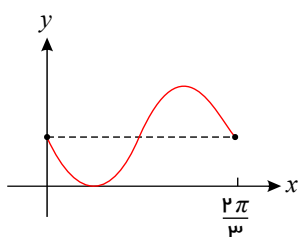
۱ $-\frac{1}{2}$

۲ $\frac{1}{2}$

۳ ۱

۴ صفر

۱۵ شکل روبه‌رو قسمتی از نمودار تابع $y = 1 - \sin mx$ است. مقدار تابع در نقطه‌ی $x = \frac{7\pi}{6}$ کدام است؟



۲ $\frac{1}{2}$

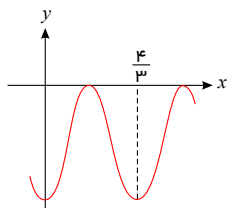
۴ ۲

۱ صفر

۳ ۱



۱۶) شکل زیر قسمتی از نمودار تابع $f(x) = -2 + a \cos \pi(1 + bx)$ است. در این صورت ab کدام می‌تواند باشد؟ ($a > 0$)



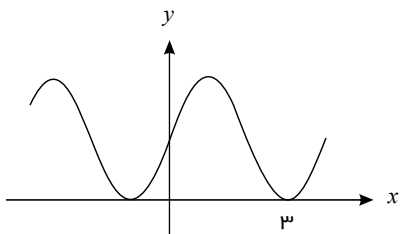
۲) ۳

۴) ۵

۱) $\frac{3}{2}$

۳) $\frac{5}{2}$

۱۷) قسمتی از نمودار تابع $f(x) = a + \sin(b\pi x)$ به صورت زیر است، $a + b$ کدام است؟



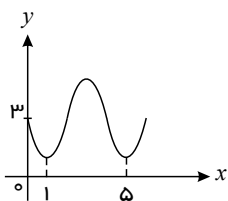
۲) ۱

۴) ۲

۱) $\frac{1}{2}$

۳) $\frac{3}{2}$

۱۸) شکل روبرو قسمتی از نمودار تابع $y = a + \sin(b\pi x)$ است. مقدار y در نقطه‌ی $x = \frac{25}{3}$ کدام است؟



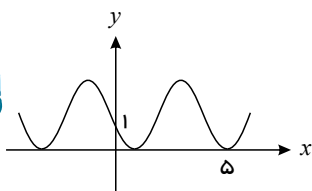
۲) ۲٫۵

۴) ۳٫۵

۱) ۲

۳) ۳

۱۹) قسمتی از نمودار تابع $f(x) = a - \cos(\pi(\frac{1}{4} + bx))$ به صورت زیر است. $a + b$ کدام است؟



۲) ۱٫۵

۴) ۰٫۵

۱) صفر

۳) ۱

۲۰) دوره تناوب تابع $f(x) = \sin x \cos x (\sin^2 x - \cos^2 x)$ کدام است؟

۴) $\frac{\pi}{4}$

۳) $\frac{\pi}{2}$

۲) π

۱) 2π

۲۱) نمودار تابع‌های $f(x) = 3 \sin 2x - 2$ و $g(x) = k$ در بازه $(0, T)$ همدیگر را در دو نقطه قطع می‌کنند. حدود k کدام است؟
(T دوره تناوب تابع f است.)

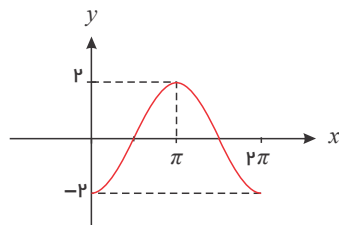
۴) $(-7, -5) \cup (-5, -2)$

۳) $(-2, 1) \cup (1, 5)$

۲) $(-5, -2) \cup (-2, 1)$

۱) $(-5, 1)$

۲۲) شکل زیر قسمتی از نمودار تابع با ضابطه $f(x) = a \cos bx$ است. مقدار $a + b$ کدام می‌تواند باشد؟



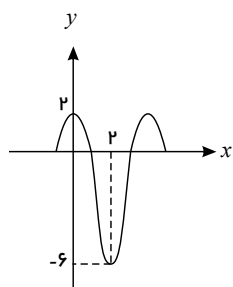
۲) ۳

۴) -۳

۱) -۲

۳) ۲

۲۳) اگر نمودار زیر مربوط به تابع $y = a \sin \pi(\frac{1}{4} - bx) + c$ باشد، مقدار تابع به ازای $x = \frac{7}{3}$ کدام است؟



۱) $-2\sqrt{3} - 2$

۲) $2\sqrt{3} - 2$

۳) -۴

۴) $-3\sqrt{3}$



۲۴ دوره تناوب تابع با ضابطه $y = 3 \sin cx - 2$ برابر π است. قدرمطلق مجموع مقادیر ماکسیم و مینیم تابع با ضابطه $y = \pi \sin(-x) + c$ کدام است؟

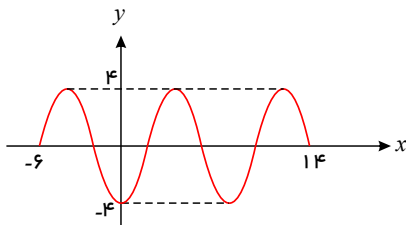
۴ ۱

۳ ۲

۵ ۳

۶ ۴

۲۵ اگر شکل زیر قسمتی از نمودار تابع $f(x) = a \cos(\pi + bx)$ باشد، مقدار $f(-\frac{32}{3})$ کدام است؟



۲√۳ ۱

-۲√۳ ۲

۲ ۳

-۲ ۴

۲۶ اگر دوره تناوب تابع $f(x) = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$ برابر T باشد، تابع f در بازه‌های $(\frac{T}{2}, T)$ و $(0, \frac{T}{2})$ به ترتیب چگونه است؟

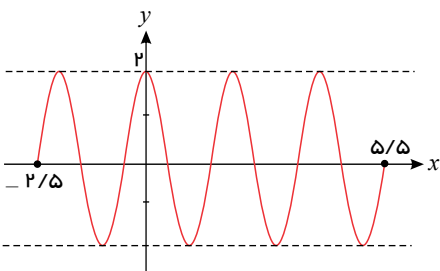
نزولی - نزولی ۴

نزولی - صعودی ۳

صعودی - نزولی ۲

صعودی - صعودی ۱

۲۷ شکل مقابل قسمتی از نمودار تابع $y = a \sin \pi(\frac{1}{2} + bx)$ است. حاصل ab کدام می‌تواند باشد؟



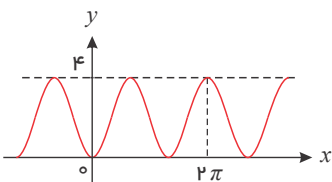
۴ ۱

۱ ۲

۲ ۳

۳ ۴

۲۸ شکل زیر مربوط به کدام ضابطه می‌تواند باشد؟



$y = -2 \sin(\frac{3}{2}x) + 2$ ۲

$y = 2 \cos(\frac{2}{3}x) - 2$ ۱

$y = 4 \sin(\frac{2}{3}x)$ ۴

$y = -2 \cos(\frac{3}{2}x) + 2$ ۳

۲۹ به ازای چند مقدار صحیح a ، دوره تناوب دو تابع $y_1 = -2 \sin((a^2 + 2)x) + 3$ و $y_2 = -3 \cos 3ax - 2$ یکسان است؟

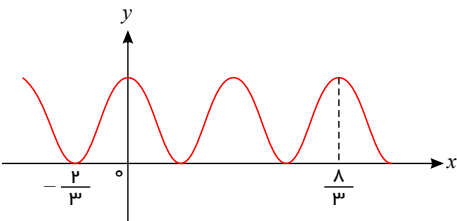
۴ ۴

۳ ۳

۲ ۲

۱ ۱

۳۰ قسمتی از نمودار تابع $y = 2 + a \cos(b\pi x)$ به صورت زیر است. حاصل $|ab|$ کدام است؟



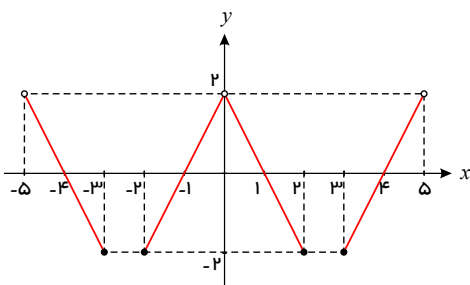
۳ ۲

1/2 ۱

1/3 ۴

۲ ۳

۳۱ قسمتی از نمودار تابع متناوب $y = f(x)$ به شکل زیر است. $f(128/1)$ کدام است؟



۱/۸ ۱

-۱/۸ ۲

-۵/۲ ۳

تعریف نشده ۴



۳۲ اگر $f(x) = \sin x - \cos x$ و $g(x) = \sin x + \cos x$ ، آنگاه دوره تناوب تابع $f \cdot g$ کدام است؟

۴ تابع متناوب نیست.

۳ $\frac{\pi}{2}$

۲ π

۱ 2π

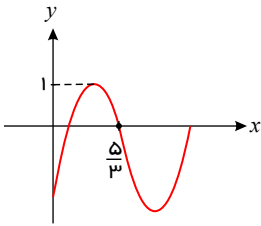
۳۳ اگر قسمتی از نمودار $f(x) = a \sin(b\pi x) - 1$ به شکل زیر باشد، مقدار b کدام گزینه می‌تواند باشد؟

۲ -2

۴ $-\frac{1}{2}$

۱ 2

۳ $\frac{3}{2}$



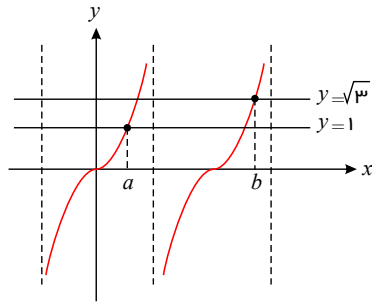
۳۴ شکل زیر قسمتی از نمودار تابع $y = \tan x$ را نشان می‌دهد. حاصل $b - a$ کدام است؟

۲ $\frac{5\pi}{12}$

۴ $\frac{13\pi}{12}$

۱ $\frac{\pi}{12}$

۳ $\frac{7\pi}{12}$



۳۵ تابع $f(x) = \tan\left(\frac{\pi x}{4}\right)$ با دامنه $(2, a)$ اکیداً صعودی است. حداکثر مقدار a کدام است؟

۴ ۸

۳ ۶

۲ ۴

۱ ۳

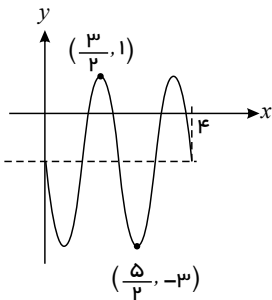
۳۶ اگر تابع $f(x) = 5 \sin 3\left(\frac{\pi}{4}x - c\right)$ به ازای $x = \frac{1}{4}$ ماکسیمم شود، طول نقطهٔ مینیمم آن، کدام می‌تواند باشد؟ (c، عدد ثابت است.)

۴ $\frac{4}{3}$

۳ $\frac{11}{6}$

۲ $\frac{7}{6}$

۱ $-\frac{5}{6}$



۳۷ شکل مقابل قسمتی از نمودار تابع $f(x) = a \cos \pi\left(\frac{3}{4} + bx\right) + c$ است. حاصل abc کدام است؟

۱ ۱

۲ ۲

۳ -۱

۴ -۲

۳۸ کدام گزینه در مورد تابع $f(x) = \sin\left(x - \frac{3\pi}{4}\right) - 2 \cos\left(\frac{7\pi}{4} + x\right)$ با دامنه $\left[-\frac{\pi}{4}, 2\pi\right]$ ، نادرست است؟

۲ اختلاف بیش‌ترین و کم‌ترین مقدار f برابر با ۶ است.

۱ نمودار، ۳ بار محور x را قطع می‌کند.

۴ خط $y = -1$ در دو نقطه نمودار را قطع می‌کند.

۳ نمودار f در بازه $\left(\pi, \frac{3\pi}{4}\right)$ بالای محور x قرار دارد.

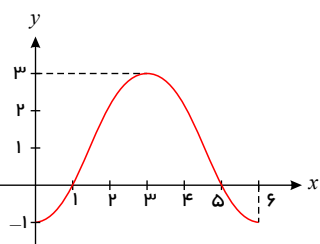
۳۹ اگر قسمتی از نمودار تابع $y = a + 2 \sin\left(\pi\left(bx - \frac{1}{4}\right)\right)$ به صورت زیر باشد، حاصل $a - b$ کدام می‌تواند باشد؟

۲ $\frac{3}{4}$

۴ $\frac{1}{2}$

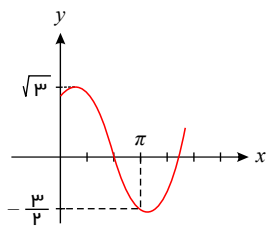
۱ $\frac{1}{4}$

۳ $\frac{3}{4}$





۴۰ شکل روبه‌رو، قسمتی از نمودار تابع $y = a + b \sin(x + \frac{\pi}{3})$ است. b کدام است؟



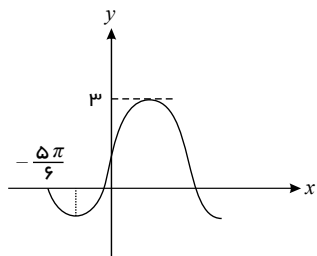
$\frac{3}{2}$ (۲)

۲ (۴)

$\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۱)

$\sqrt{3}$ (۳)

۴۱ شکل روبه‌رو، قسمتی از نمودار تابع $y = a + b \cos(\frac{\pi}{2} - x)$ است. مقدار تابع در $x = \frac{\pi}{6}$ کدام است؟



۱٫۵ (۱)

۲ (۲)

۲٫۵ (۳)

$1 + \sqrt{3}$ (۴)



پاسخنامه تشریحی

۱ می‌دانیم: دوره‌ی تناوب تابع $y = k \cdot \cos ax$ برابر $T = \frac{2\pi}{|a|}$ است.

باتوجه به شکل، نقطه‌ی $(0, 2)$ عضو تابع است پس در آن صدق می‌کند:

$$y(0) = 2 \Rightarrow 2 = a \cos 0 \Rightarrow a = 2$$

از طرفی نصف دوره‌ی تناوب تابع باتوجه به شکل برابر $\frac{\pi}{3}$ است، بنابراین:

$$\frac{T}{2} = \frac{\pi}{3} \Rightarrow T = \pi \Rightarrow \frac{2\pi}{|b|} = \pi \Rightarrow |b| = 2 \Rightarrow b = \pm 2$$

هر دو مقدار b قابل قبول است، پس $a + b$ می‌تواند برابر مقادیر صفر یا ۴ باشد.

۲ یادآوری: دوره‌ی تناوب تابع $y = \cos kx$ برابر $\frac{2\pi}{|k|}$ است.

از روی نمودار تابع مشاهده می‌کنیم که، نمودار داده شده در بازه‌ی $[-\frac{2}{3}, \frac{8}{3}]$ به تعداد ۲٫۵ مرتبه تکرار شده است، لذا اگر دوره‌ی تناوب این تابع را T فرض کنیم داریم:

$$2.5T = \frac{8}{3} - (-\frac{2}{3}) \Rightarrow 2.5T = \frac{10}{3} \Rightarrow T = \frac{4}{3} \quad (1)$$

با توجه به مطلب گفته شده داریم:

$$y_1 = \cos(b\pi x) \xrightarrow{(1)} T = \frac{2\pi}{|b\pi|} = \frac{4}{3} \Rightarrow \frac{2}{|b|} = \frac{4}{3} \Rightarrow b = \pm \frac{3}{2} \quad (2)$$

همچنین از روی نمودار تابع مشاهده می‌کنیم که $f(-\frac{2}{3}) = 0$ است. لذا:

$$\begin{aligned} \xrightarrow{(2)} f(-\frac{2}{3}) &= 3 + a \cos(\pm \frac{3}{2}\pi \times (-\frac{2}{3})) = 3 + a \cos(\pm \pi) = 3 - a = 0 \\ \Rightarrow a &= 3 \Rightarrow a + 2b = 3 + 2(\pm \frac{3}{2}) \Rightarrow \begin{cases} a + 2b = 0 \\ a + 2b = 6 \end{cases} \end{aligned}$$

۳ تابع $y = \cos^2 x - \sin^2 x$ برابر است با $y = \cos 2x$. با توجه به نمودار، مقدار a به ازای $x = 0$ در تابع موردنظر به دست می‌آید:

$$y = \cos 2x \xrightarrow{x=0} y = \cos 2(0) = \cos 0 = 1 \Rightarrow a = 1$$

از طرفی در $x = b$ ، دوباره مقدار y به $a = 1$ می‌رسد.

پس:

$$f(b) = 1 \rightarrow \cos 2b = 1 \rightarrow \begin{cases} 2b = 0 \rightarrow b = 0 \\ 2b = 2\pi \rightarrow b = \pi \end{cases}$$

۴ دوره تناوب تابع $y = \sin kx$ برابر $\frac{2\pi}{|k|}$ می‌باشد.

$$y = a \sin(b\pi x) \rightarrow T = \frac{2\pi}{|b|\pi} = \frac{2}{|b|} = 6 \rightarrow |b| = \frac{1}{3} \rightarrow b = \pm \frac{1}{3}$$

باتوجه به شکل داده شده a و b هر دو مثبت یا هر دو منفی هستند و چون همه گزینه‌ها مثبت می‌باشند پس $b = \frac{1}{3}$ قابل قبول است. بیشترین مقدار این تابع از روی شکل ۲ می‌باشد و بیشترین

مقدار $y = a \sin(b\pi x)$ زمانی رخ می‌دهد که سینوس برابر ۱ باشد

$$a + b = 2 + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$

۵

می‌دانیم: دوره‌ی تناوب $y = \sin ax \rightarrow T = \frac{2\pi}{|a|}$

$$y = a + \cos(-\frac{1}{3} + bx)\pi \rightarrow y = a + \cos(\frac{-\pi}{3} + \pi bx)$$

$$\cos(\frac{\pi}{3} - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\rightarrow y = a + \cos(\frac{\pi}{3} - \pi bx) \rightarrow y = a + \sin \pi bx$$

$$\xrightarrow{\text{باتوجه به شکل}} \frac{3}{2}T = 9 \rightarrow T = 6 \rightarrow \frac{2\pi}{|b\pi|} = 6 \rightarrow |b| = \frac{1}{3} \rightarrow b = \pm \frac{1}{3}$$

چون بلافاصله بعد از محور عرض، نمودار نزول پیدا می‌کند، بنابراین ضریب کمان سینوس باید منفی باشد پس $b = -\frac{1}{3}$ است.



$$f(x) = a + \sin\left(\frac{-\pi}{3}x\right) \xrightarrow{\text{صدق}} 1 = a + 0 \rightarrow a = 1 \rightarrow f(x) = 1 + \sin\left(\frac{-\pi}{3}x\right) = 1 - \sin\frac{\pi}{3}x$$

$$\rightarrow f(29) = 1 - \sin\frac{29\pi}{3} = 1 - \sin(10\pi - \frac{\pi}{3}) = 1 - \sin(\frac{-\pi}{3}) = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

فاصله طولی بین ماکزیمم و مینیمم متوالی برابر نصف دوره تناوب است. ۱ ۲ ۳ ۴ ۶

$$\frac{T}{2} = 1 \Rightarrow T = 2 \Rightarrow \frac{2\pi}{|b\pi|} = 2 \Rightarrow |b| = 1 \Rightarrow b = \pm 1 \Rightarrow y = 1 + a \cdot \cos(\pm\pi x) = 1 + a \cdot \cos \pi x$$

از طرفی $f(1) = 3$ ، بنابراین داریم:

$$3 = 1 + a \cos(\pi(1)) \Rightarrow 3 = 1 + a \cos(\pi) \Rightarrow 3 = 1 + a(-1) \Rightarrow a = -2$$

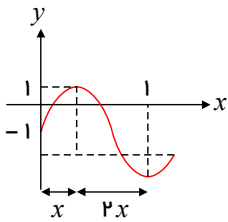
$$y = \sin ax \rightarrow T = \frac{2\pi}{|a|}$$

می‌دانیم: ۱ ۲ ۳ ۴ ۷

نکته: در منحنی‌های متناوب دو برابر فاصله‌ی طولی ماکسیمم و مینیمم، طول دوره‌ی تناوب آن تابع است.

باتوجه به شکل دوره‌ی تناوب تابع برابر $4x = 1$ می‌باشد $3x = 1$ است، پس $x = \frac{1}{3}$ به دست می‌آید بنابراین دوره‌ی تناوب تابع $T = 4x = \frac{4}{3}$ خواهد بود. از

ضابطه‌ی تابع دوره‌ی تناوب برابر $T = \frac{2\pi}{|b\pi|}$ به دست می‌آید:



$$\frac{2\pi}{|b\pi|} = \frac{2}{|b|} = \frac{4}{3} \Rightarrow |b| = \frac{3}{2} \Rightarrow \begin{cases} b = \frac{3}{2} \\ \text{یا} \\ b = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

اگر $b = \frac{3}{2}$ باشد، مقدار تابع در $x = \frac{1}{3}$ برابر ۱ است بنابراین همین عدد برای b صحیح است.

$$y\left(\frac{1}{3}\right) = a \sin \frac{\pi}{2} - 1 = 1 \Rightarrow a - 1 = 1 \Rightarrow a = 2$$

$$\Rightarrow a + b = 2 + \frac{3}{2} = \frac{7}{2} = 3.5$$

توجه کنید که اگر $b = -\frac{3}{2}$ باشد به طور مشابه $a = -2$ به دست می‌آید که $a + b = -\frac{7}{2}$ می‌شود که در گزینه‌ها نیست.

ابتدا زاویه را از درجه به رادیان تبدیل می‌کنیم. ۱ ۲ ۳ ۴ ۸

$$\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow \frac{50}{180} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow R = \frac{5\pi}{18}$$

$$\text{شعاع دایره: } \theta = \frac{L}{r} \Rightarrow \frac{5\pi}{18} = \frac{10}{r} \Rightarrow r\pi = 36 \Rightarrow r = \frac{36}{\pi}$$

$$\left. \begin{aligned} S &= \text{مساحت دایره} = \pi r^2 \\ P &= \text{محیط دایره} = 2\pi r \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{S}{P} = \frac{r}{2} = \frac{\frac{36}{\pi}}{2} = \frac{18}{\pi}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۹

$$\left| \begin{array}{l} \text{صدق در} \\ \text{تابع} \end{array} \right. \begin{array}{l} 5 \\ 5 \end{array} \xrightarrow{\quad} 5 = a(1) + 3 \rightarrow a + 3 = 5 \Rightarrow a = 2$$

طبق نمودار فاصله‌ی $x = 0$ تا $x = 2$ ، برابر نصف دوره‌ی تناوب تابع مورد نظر است:

$$2 - 0 = \frac{T}{2} \Rightarrow T = 4 \Rightarrow \frac{2\pi}{|b\pi|} = 4 \Rightarrow b = \pm \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a + b = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \\ a + b = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2} \end{cases} \text{ در گزینه‌ها نیست}$$

دوره‌ی تناوب تابع $y = \sin x$ برابر $T = 2\pi$ است.

می‌دانیم $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = \sin \alpha$ بنابراین $y = b \sin ax$ ۱ ۲ ۳ ۴ ۱۰

از طرفی دوره‌ی تناوب تابع $f(x) = b \sin ax$ به صورت $\frac{2\pi}{|a|}$ می‌باشد.

همچنین از روی نمودار تابع دوره‌ی تناوب تابع برابر است با 4π در نتیجه:

$$\frac{2\pi}{|a|} = 4\pi \rightarrow |a| = \frac{1}{2} \rightarrow a = \pm \frac{1}{2} \xrightarrow{a > 0} a = \frac{1}{2}$$

با توجه به نمودار $f(\pi) = -2$ می‌باشد.



$$f(\pi) = b \sin a\pi \stackrel{a=\frac{1}{2}}{=} b \sin \frac{\pi}{2} = b = -2 \rightarrow ab = \frac{1}{2} \times (-2) = -1$$

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a \quad \text{می دانیم: } \boxed{1} \quad \boxed{2} \quad \boxed{3} \quad \boxed{4} \quad \boxed{11}$$

$$f(x) = \cos^2 x - \sin^2 x = (\cos^2 x + \sin^2 x)(\cos^2 x - \sin^2 x) = \cos 2x$$

دوره تناوب تابع $y = \cos bx$ برابر $T = \frac{2\pi}{|b|}$ است بنابراین دوره تناوب این تابع برابر $T = \frac{2\pi}{|2|} = \pi$ است.

$$\boxed{1} \quad \boxed{2} \quad \boxed{3} \quad \boxed{4} \quad \boxed{12}$$

$$f(x) = a \sin\left(\frac{\pi}{2} + bx\right) \xrightarrow{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \alpha} f(x) = a \cos bx$$

نمودار تابع از نقطه $\begin{vmatrix} 0 \\ -2 \end{vmatrix}$ عبور می کند بنابراین این نقطه در تابع صدق می کند.

$$\begin{vmatrix} 0 \\ -2 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{صدق}} -2 = a \cos 0 \rightarrow a = -2 \rightarrow f(x) = -2 \cos bx$$

می دانیم دوره تناوب $y = \cos bx$ برابر $T = \frac{2\pi}{|b|}$ است و از روی نمودار داریم:

$$\frac{3T}{4} = \frac{\pi}{2} \rightarrow T = \frac{2\pi}{3} \rightarrow \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{3} \rightarrow |b| = 3 \rightarrow b = \pm 3$$

$$\text{پس: } f(x) = -2 \cos(\pm 3x) \xrightarrow{\cos(-\alpha) = \cos \alpha} f(x) = -2 \cos 3x \rightarrow f\left(\frac{\pi}{12}\right) = -2 \cos \frac{\pi}{4} = -2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2}$$

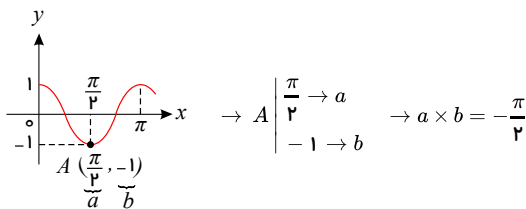
$$\cos 2a = 1 - 2\sin^2 a \quad \text{می دانیم: } \boxed{1} \quad \boxed{2} \quad \boxed{3} \quad \boxed{4} \quad \boxed{13}$$

ابتدا تابع داده شده را ساده می کنیم: $y = 1 - 2\sin^2 x = \cos 2x$

می دانیم دوره تناوب $y = \cos ax$ از رابطه $T = \frac{2\pi}{|a|}$ بدست می آید و Max تابع $y = \cos 2x$ برابر ۱ و Min آن برابر -۱ است.

$$T = \frac{2\pi}{|a|} = \frac{2\pi}{|2|} = \pi, \quad Max = 1, \quad Min = -1$$

شکل تابع را رسم کرده و مختصات نقطه A را پیدا می کنیم:



می دانیم دوره تناوب تابع $y = a \cos bx$ برابر $T = \frac{2\pi}{|b|}$ است. از روی شکل مشخص است که دوره تناوب تابع برابر 4π است.

$$T = \frac{2\pi}{|b|} \rightarrow 4\pi = \frac{2\pi}{|m|} \rightarrow 2 = \frac{1}{|m|} \rightarrow |m| = \frac{1}{2} \rightarrow m = \frac{1}{2}, m = -\frac{1}{2}$$

چون $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$ است فرقی نمی کند که $m = \frac{1}{2}$ یا $m = -\frac{1}{2}$ باشد.

$$y = \frac{1}{2} + 2 \cos\left(\frac{1}{2}x\right) \rightarrow y\left(\frac{16\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} + 2 \cos\left(\frac{1}{2} \times \frac{16\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} + 2 \cos \frac{8\pi}{3}$$

$$\rightarrow y\left(\frac{16\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} + 2 \cos\left(2\pi + \frac{2\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} + 2 \cos \frac{2\pi}{3} = \frac{1}{2} + 2\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$$

می دانیم دوره تناوب تابع $y = a \sin bx$ برابر $T = \frac{2\pi}{|b|}$ است. از روی شکل مشخص است که دوره تناوب تابع برابر $\frac{2\pi}{3}$ است.

$$T = \frac{2\pi}{|b|} \rightarrow \frac{2\pi}{3} = \frac{2\pi}{|m|} \rightarrow |m| = 3 \rightarrow m = 3, \quad m = -3$$

از طرفی تابع در همسایگی راست $x = 0$ نزولی است پس $m > 0$ است یعنی $m = 3$ قابل قبول است.

$$y = 1 - \sin 3x \rightarrow y\left(\frac{5\pi}{6}\right) = 1 - \sin \frac{5\pi}{6} = 1 - \sin \frac{\pi}{6} = 1 - \sin\left(4\pi - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$= 1 - \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = 1 - (-1) = 2$$

$$\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha \quad \text{می دانیم: } \boxed{1} \quad \boxed{2} \quad \boxed{3} \quad \boxed{4} \quad \boxed{16}$$

$$f(x) = -2 + a \cos(\pi + \pi bx) \rightarrow f(x) = -2 - a \cos(\pi bx)$$

$$\text{داریم: } -1 \leq \cos(\pi bx) \leq 1 \xrightarrow{a>0} -a \leq a \cos(\pi bx) \leq a$$



منفی ضرب می کنیم

$$\rightarrow -a \leq -a \cos(\pi b x) \leq a \rightarrow -2 - a \leq -2 - a \cos(\pi b x) \leq -2 + a$$

بیشترین مقدار تابع از روی شکل برابر صفر است یعنی $-2 + a = 0$ است یعنی $a = 2$ می باشد پس $f(x) = -2 - 2 \cos(\pi b x)$ است.

با توجه به نمودار داده شده دوره ی تناوب تابع برابر $T = \frac{4}{3}$ است و می دانیم دوره ی تناوب تابع $y = a \cos bx$ به صورت $T = \frac{2\pi}{|b|}$ است.

$$\frac{4}{3} = \frac{2\pi}{|b|} \rightarrow \frac{2}{3} = \frac{1}{|b|} \rightarrow |b| = \frac{3}{2} \rightarrow b = \pm \frac{3}{2}$$

بنابراین $a \times b = \pm 3$ است.

اولاً چون مقادیر تابع از نقطه ی $x = 0$ در حال افزایش است، بنابراین $b > 0$ از طرفی کم ترین مقدار تابع صفر است. در نتیجه:

$$-1 \leq \sin b\pi x \leq 1 \Rightarrow a - 1 \leq a + \sin b\pi x \leq a + 1 \Rightarrow a - 1 = 0 \Rightarrow a = 1$$

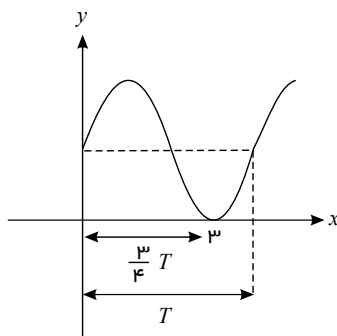
از طرفی با توجه به شکل $\frac{3}{4}T = 3$ و در نتیجه $T = 4$ است.

دوره ی تناوب $y = \sin bx$ به صورت $T = \frac{2\pi}{|b|}$ است.

$$\frac{2\pi}{|b\pi|} = 4 \Rightarrow |b| = \frac{1}{2} \xrightarrow{b>0} b = \frac{1}{2}$$

پس $a + b = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ است.

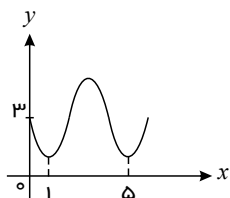
به شکل دقت کنید:



۱ ۲ ۳ ۴ ۱۸

با توجه به شکل روبه رو به راحتی پی می بریم که دوره ی تناوب اصلی تابع $y = a + \sin(b\pi x)$ برابر $T = 4$ می باشد. از طرفی عرض از مبدأ این تابع برابر ۳

است یعنی: $f(0) = 3 \rightarrow a = 3$



توجه کنید دوره ی تناوب تابع $y = \sin kx$ برابر $T = \frac{2\pi}{|k|}$ است.

$$y = a + \sin\left(\frac{2\pi}{T}x\right) \Rightarrow \text{دوره ی تناوب} = T = \frac{2\pi}{|k|} = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2}{|b|} \xrightarrow{T=4} \frac{2}{|b|} = 4 \Rightarrow |b| = \frac{1}{2} \rightarrow b = \pm \frac{1}{2}$$

چون به ازای $x > 0$ ، تابع ابتدا نزولی می باشد، پس مقدار b منفی می باشد، یعنی $b = -\frac{1}{2}$ داریم:

$$y = 3 + \sin\left(-\frac{1}{2}\pi x\right)$$

$$\Rightarrow y\left(\frac{25}{3}\right) = 3 + \sin\left(-\frac{25}{6}\pi\right) = 3 - \sin\left(4\pi + \frac{\pi}{6}\right) = 3 - \sin\frac{\pi}{6} = 3 - \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

$$f(x) = a - \cos\left(\frac{\pi}{2} + b\pi x\right) = a + \sin b\pi x$$

$$f(0) = 1 \Rightarrow a + \sin 0 = 1 \Rightarrow a = 1$$

$$T + \frac{T}{4} = 5 \Rightarrow \frac{5}{4}T = 5 \Rightarrow T = 4$$

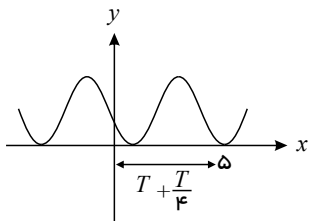
$$\frac{2\pi}{|b\pi|} = 4 \Rightarrow |b| = \frac{1}{2} \Rightarrow b = \pm \frac{1}{2}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۹ ابتدا ضابطه ی تابع را ساده تر کنیم:

با توجه به نمودار، نقطه ی $(0, 1)$ روی نمودار قرار دارد:

از طرفی مطابق شکل زیر، دوره ی تناوب تابع را می یابیم:

دوره تناوب تابع $y = \sin ax$ از رابطه $T = \frac{2\pi}{|a|}$ بدست می آید.



چون بلافاصله بعد از محور y ها نمودار در حال کاهش است، پس $b = -\frac{1}{4}$ قابل قبول است.

$$\Rightarrow a + b = 1 + (-\frac{1}{4}) = 0.75$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۲۰

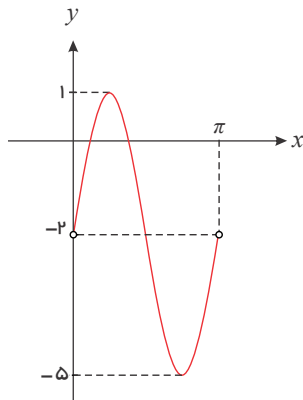
می‌دانیم $\sin a \cos a = \frac{1}{2} \sin 2a$ و $\cos^2 a - \sin^2 a = \cos 2a$ است و دوره تناوب تابع $f(x) = a \sin bx + c$ به صورت $T = \frac{2\pi}{|b|}$ است.

$$f(x) = \sin x \cos x (\sin^2 x - \cos^2 x) = -\sin x \cos x (\cos^2 x - \sin^2 x) = -\frac{1}{2} \sin 2x \cos 2x$$

$$f(x) = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \sin 2(2x) = -\frac{1}{4} \sin 4x \Rightarrow T = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۲۱

$$f(x) = 3 \sin 2x - 2 \Rightarrow T = \frac{2\pi}{2} = \pi$$



برای رسم نمودار تابع f کافی است که در تابع $y = \sin x$ طولها را نصف کرده و سپس عرضها را سه برابر کرده و شکل را دو واحد پایین آوریم که شکل روبرو به دست می‌آید.

تابع $g(x) = k$ زمانی نمودار f را در دو نقطه قطع می‌کند که: $-5 < k < -2$ یا $-2 < k < 1$

۱ ۲ ۳ ۴ ۲۲ تابع از نقطه $(0, -2)$ می‌گذرد، پس داریم:

$$f(x) = a \cos bx$$

$$(0, -2) \Rightarrow f(0) = -2 \Rightarrow a \cos 0 = -2 \Rightarrow a = -2 \Rightarrow f(x) = -2 \cos bx$$

با توجه به این که دوره تناوب تابع 2π است و دوره تناوب تابع $f(x) = a \cos bx + c$ به صورت $T = \frac{2\pi}{|b|}$ است، داریم:

$$T = \frac{2\pi}{|b|} = 2\pi \Rightarrow |b| = 1 \Rightarrow b = \pm 1$$

با توجه به این که $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$ ، هر دو مقدار ± 1 را می‌تواند اختیار کند.

$$b = 1 \Rightarrow a + b = -2 + 1 = -1$$

$$b = -1 \Rightarrow a + b = -2 - 1 = -3$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۲۳ ابتدا ضابطه تابع را ساده تر کنیم:

$$y = a \sin \pi(\frac{1}{4} - bx) + c \Rightarrow y = a \sin(\frac{\pi}{4} - b\pi x) + c \Rightarrow y = a \cos b\pi x + c$$

فاصله افقی بین مینیمم و ماکزیمم متوالی برابر $\frac{T}{4}$ است. پس داریم:

$$\frac{T}{2} = 2 \Rightarrow T = 4 \Rightarrow \frac{2\pi}{|b\pi|} = 4 \Rightarrow \frac{2\pi}{|b|} = 4 \Rightarrow |b| = \frac{1}{2} \Rightarrow b = \pm \frac{1}{2}$$

هردوی $\pm \frac{1}{2}$ قابل قبول است، زیرا $\cos(-x) = \cos x$ مطابق شکل ماکسیمم تابع ۲ و مینیمم تابع -۶ است. پس:

$$\left. \begin{array}{l} Max = 2 \rightarrow |a| + c = 2 \\ Min = -6 \rightarrow -|a| + c = -6 \end{array} \right\} \rightarrow c = -2, a = \pm 4$$

شکل داده شده، فرمت تابع $\cos x$ را دارد. پس فقط $a = 4$ صحیح است و داریم:



$$f(x) = 4 \cos \frac{\pi}{3} x - 2 \xrightarrow{x = \frac{y}{3}} f\left(\frac{y}{3}\right) = 4 \cos\left(\frac{\pi}{3} \times \frac{y}{3}\right) - 2 = 4 \cos \frac{y\pi}{9} - 2$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{y}{3}\right) = 4 \cos\left(\pi + \frac{\pi}{9}\right) - 2 = 4\left(-\cos \frac{\pi}{9}\right) - 2 = -4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} - 2 = -2\sqrt{3} - 2$$

در تابع $y = a \sin bx + c$ داریم: ۱ ۲ ۳ ۴ ۲۴

دوره تناوب $T = \frac{2\pi}{|b|}$, $Max = |a| + c$, $Min = -|a| + c$

$y = 3 \sin cx - 2 \Rightarrow$ دوره تناوب $T = \frac{2\pi}{|c|} = \pi \Rightarrow |c| = 2 \Rightarrow c = \pm 2$

$y = \pi \sin(-x) + c \Rightarrow \begin{cases} Max = \pi + c \\ Min = -\pi + c \end{cases} \Rightarrow Max + Min = 2c \Rightarrow \begin{cases} c = 2 \Rightarrow Max + Min = 4 \\ c = -2 \Rightarrow Max + Min = -4 \end{cases}$

۱ ۲ ۳ ۴ ۲۵

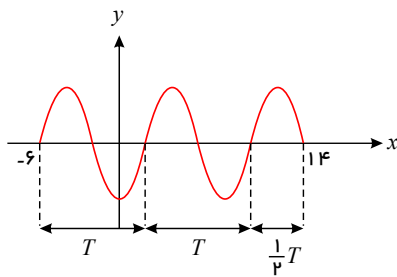
نکته: $\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$

$f(x) = a \cos(\pi + bx) \Rightarrow f(x) = -a \cos bx$

ابتدا ضابطه f را ساده‌تر می‌نویسیم:

نمودار رسم شده، تابع را در $2/5$ دوره تناوب نشان می‌دهد، پس:

$$\Rightarrow \frac{5}{2}T = 14 - (-6) \Rightarrow \frac{5}{2}T = 20 \Rightarrow T = 8$$



$$\frac{2\pi}{|b|} = 8 \Rightarrow |b| = \frac{\pi}{4}$$

از طرفی دوره تناوب تابع از رابطه $\frac{2\pi}{|b|}$ به دست می‌آید، پس:

$f(0) = -4 \Rightarrow -a \cos 0 = -4 \Rightarrow a = 4$

از طرفی مقدار تابع در $x = 0$ برابر -4 است، پس:

در نتیجه ضابطه f به صورت $f(x) = -4 \cos \frac{\pi x}{4}$ یا $f(x) = -4 \cos\left(-\frac{\pi x}{4}\right)$ در می‌آید و داریم:

$$f\left(-\frac{32}{3}\right) = -4 \cos\left(\frac{\pi}{4} \times \frac{-32}{3}\right) = -4 \cos\left(\frac{-8\pi}{3}\right) = -4 \cos\left(\frac{8\pi}{3}\right)$$

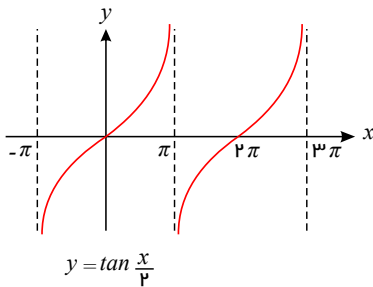
$$= -4 \cos\left(2\pi + \frac{2\pi}{3}\right) = -4 \cos \frac{2\pi}{3} = -4 \times \frac{-1}{2} = 2$$

دقت کنید چون $\cos(-\theta) = \cos \theta$ ، جواب سؤال برای $b = -\frac{\pi}{4}$ نیز همین است.

۱ ۲ ۳ ۴ ۲۶ می‌دانیم $\sin a = 2 \sin \frac{a}{2} \cos \frac{a}{2}$ و $1 + \cos a = 2 \cos^2 \frac{a}{2}$ ، اکنون تابع را ساده می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{\sin x}{1 + \cos x} = \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} = \tan \frac{x}{2}, (\cos x \neq -1)$$

نمودار تابع f از انبساط افقی تابع $y = \tan x$ با ضریب ۲ به دست می‌آید:



دوره تناوب تابع $y = \tan \frac{x}{2}$ برابر با 2π است. بنابراین نمودار تابع $y = \tan \frac{x}{2}$ در بازه $(0, \pi)$ و $(\pi, 2\pi)$ صعودی است.

۱ ۲ ۳ ۴ ۲۷ ابتدا تابع را ساده می‌کنیم.

$y = a \sin\left(\frac{\pi}{2} + b\pi x\right) = a \cos(b\pi x)$

از آنجا که دوره تناوب $y = a \cos bx + c$ برابر است با $T = \frac{2\pi}{|b|}$ و با توجه به این که نمودار ۴ تناوب خود را طی کرده است، داریم:



$$4T = 5,5 - (-2,5) = 8 \Rightarrow T = \frac{8}{4} = 2$$

$$T = \frac{2\pi}{|b\pi|} = 2 \Rightarrow |b| = 1 \Rightarrow b = \pm 1$$

و از طرفی نقطه (۰, ۲) روی نمودار قرار دارد، پس در ضابطه آن صدق می کند، یعنی:

$$2 = a \cos(0) \Rightarrow a = 2$$

که عدد ۲ در گزینه ها موجود است.

$$T = \frac{2\pi}{|b\pi|} = 2 \Rightarrow |b| = 1 \Rightarrow b = \pm 1$$

$$T + \frac{T}{2} = 2\pi \Rightarrow \frac{3T}{2} = 2\pi \Rightarrow T = \frac{4\pi}{3}$$

$$T = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{4\pi}{3} \Rightarrow |b| = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \Rightarrow b = \pm \frac{3}{2}$$

$$\left. \begin{aligned} \text{Max} = 4 &\Rightarrow |a| + c = 4 \\ \text{Min} = 0 &\Rightarrow -|a| + c = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 2c = 4 \Rightarrow c = 2 \Rightarrow |a| = 2 \xrightarrow{a < 0} a = -2$$

$$y = -2 \cos\left(\pm \frac{3}{2}x\right) + 2 = -2 \cos\left(\frac{3x}{2}\right) + 2$$

$$y_1 = -2 \sin((a^2 + 2)x) + 3 : T_1 = \frac{2\pi}{|a^2 + 2|}$$

$$y_2 = -3 \cos 3ax - 2 : T_2 = \frac{2\pi}{|3a|}$$

$$\begin{aligned} T_1 = T_2 &\rightarrow |a^2 + 2| = |3a| \Rightarrow \begin{cases} a^2 + 2 = 3a \Rightarrow a^2 - 3a + 2 = 0 \\ a^2 + 2 = -3a \Rightarrow a^2 + 3a + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a-1)(a-2) = 0 \\ (a+1)(a+2) = 0 \end{cases} \\ \Rightarrow a = -1, 1, -2, 2 \end{aligned}$$

$$\text{دوره تناوب تابع } y = a \cos bx + c \text{ به صورت } T = \frac{2\pi}{|b|} \text{ و کمترین مقدار آن } \text{Min} = -|a| + c \text{ است.}$$

$$\text{Min} = -|a| + 2 = 0 \Rightarrow |a| = 2$$

$$\frac{5}{2}T = \frac{10}{3} \Rightarrow T = \frac{2 \times 10}{5 \times 3} = \frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{|b|} = \frac{4}{3} \Rightarrow |b| = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \Rightarrow |ab| = |a||b| = 2 \times \frac{3}{2} = 3$$

با توجه به شکل، دوره تناوب تابع برابر $T = 5$ است و می دانیم در توابع متناوب اگر از هر نقطه روی نمودار به اندازه دوره تناوب یا مضربی صحیح از آن جلو یا عقب برویم مقدار تابع تغییر نمی کند.

$$128,1 = 25(5) + 3,1 \rightarrow f(128,1) = f(3,1)$$

برای پیدا کردن $f(3,1)$ باید معادله خط مشخص شده در شکل در بازه $[3, 4]$ را بنویسیم:

$$\left\{ \begin{aligned} A & \left| \begin{matrix} 3 \\ -2 \end{matrix} \right. \\ B & \left| \begin{matrix} 4 \\ 0 \end{matrix} \right. \end{aligned} \right. \rightarrow \frac{y - y_A}{x - x_A} = \frac{y - y_B}{x - x_B} \rightarrow \frac{y + 2}{x - 3} = \frac{-2 - 0}{3 - 4} = 2 \rightarrow y + 2 = 2x - 6 \rightarrow y = 2x - 8$$

$$\text{پس } f(x) = 2x - 8 \rightarrow f(3,1) = 2(3,1) - 8 = -1,8$$

$$\text{می دانیم که } \cos^2 a - \sin^2 a = \cos 2a \text{ است.}$$

تابع $f \cdot g$ را تشکیل می دهیم:

$$(f \cdot g)(x) = (\sin x - \cos x)(\sin x + \cos x) = \sin^2 x - \cos^2 x = -\cos 2x$$

$$\text{می دانیم دوره تناوب تابع } f(x) = a \cos bx \text{ برابر } \frac{2\pi}{|b|} \text{ است. بنابراین:}$$

$$T = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

$$\text{در تابع } y = a \sin bx + c, \text{ بیشترین مقدار تابع از رابطه } |a| + c \text{ بدست می آید.}$$



$$|a| + c = 1 \rightarrow |a| - 1 = 1 \rightarrow |a| = 2 \rightarrow a = \pm 2$$

شکل داده شده فرمت خود سینوس را دارد بنابراین a و b هم علامتند ابتدا حالتی را در نظر می‌گیریم که b و a هر دو مثبت هستند.

$$f(x) = 2 \sin(b\pi x) - 1 \xrightarrow{\text{صدق}} \frac{5}{3} = 2 \sin \frac{5b\pi}{3} - 1 \rightarrow \sin \frac{5b\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

مقدار سینوس برابر $\frac{1}{2}$ شده است برای x های مثبت این اتفاق اولین بار در $\frac{\pi}{6}$ و بار دوم در $\frac{5\pi}{6}$ اتفاق می‌افتد و با توجه به شکل تابع، باید $\frac{5b\pi}{3}$ برابر $\frac{5\pi}{6}$ باشد.

$$\frac{5b\pi}{3} = \frac{5\pi}{6} \rightarrow \frac{b}{3} = \frac{1}{6} \rightarrow b = \frac{1}{2}$$

به طریق مشابه برای حالتی که a و b هر دو منفی هستند، $b = -\frac{1}{2}$ به دست می‌آید.

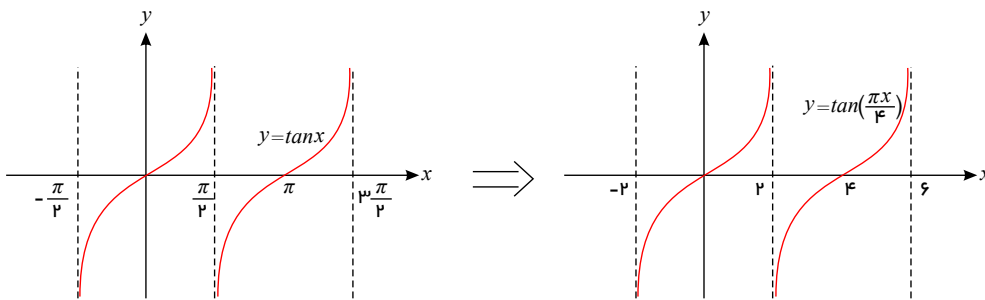
بنابراین $b = \frac{1}{2}$ یا $b = -\frac{1}{2}$ با توجه به نمودار تابع $\tan x$ باید $\tan a = 1$ در ربع اول باشد بنابراین $a = \frac{\pi}{4}$ است و $\tan b = \sqrt{3}$ در $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ است، پس $b = \frac{3\pi}{2}$ یا $b = \frac{5\pi}{2}$.

$$b - a = \frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{13\pi}{4}$$

$$\frac{13\pi}{4}$$

برای رسم $f(x) = \tan(\frac{\pi}{4}x)$ از روی نمودار

$y = \tan x$ باید در نمودار $y = \tan x$ طول نقاط را بر $\frac{\pi}{4}$ تقسیم کنیم. که داریم:



پس حداکثر مقدار a برای اینکه تابع f روی دامنه‌اش یعنی بازه $(2, a)$ اکیداً صعودی باشد، برابر ۶ است.

دوره تناوب تابع $f(x) = a \sin bx + c$ برابر $\frac{2\pi}{|a|}$ است.

$$f(x) = 5 \sin 3(\frac{\pi}{2}x - c) = 5 \sin(\frac{3\pi}{2}x - 3c) \rightarrow T = \frac{2\pi}{\frac{3\pi}{2}} = \frac{4}{3}$$

فاصله طولی نقاط ماکسیمم و مینیمم متوالی برابر $\frac{T}{2}$ است پس اگر از $x = \frac{1}{2}$ به اندازه $\frac{T}{2}$ به سمت راست یا چپ برویم به نقطه مینیمم می‌رسیم.

$$x_{Min} = x_{Max} + \frac{T}{2} = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{7}{6}$$

$$f(x) = a \cos(\frac{3\pi}{2} + b\pi x) + c = a \sin(b\pi x) + c$$

با توجه به این که فاصله طولی نقطه ماکسیمم و مینیمم متوالی برابر با نصف دوره تناوب است، پس:

$$T = 2 \times (\frac{5}{2} - \frac{3}{2}) = 2 \Rightarrow \frac{2\pi}{|b\pi|} = 2 \Rightarrow |b| = 1 \rightarrow b = \pm 1$$

و همچنین از نقاط $\frac{5}{2}$ و $\frac{3}{2}$ می‌توانیم برای پیدا کردن a و c استفاده کنیم.

حالت اول: $b = 1$

$$\left. \begin{aligned} f(\frac{3}{2}) = 1 &\Rightarrow a \sin(\frac{3\pi}{2}) + c = 1 \Rightarrow -a + c = 1 \\ f(\frac{5}{2}) = -3 &\Rightarrow a \sin(\frac{5\pi}{2}) + c = -3 \Rightarrow a + c = -3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ c = -1 \end{cases}$$

حالت دوم: $b = -1$

$$\left. \begin{aligned} f(\frac{3}{2}) = 1 &\Rightarrow a + c = 1 \\ f(\frac{5}{2}) = -3 &\Rightarrow -a + c = -3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ c = -1 \end{cases}$$

پس در هر دو حالت $abc = 2$ است.

$$\frac{2}{1} \times \frac{1}{2} \times 2 = 2$$

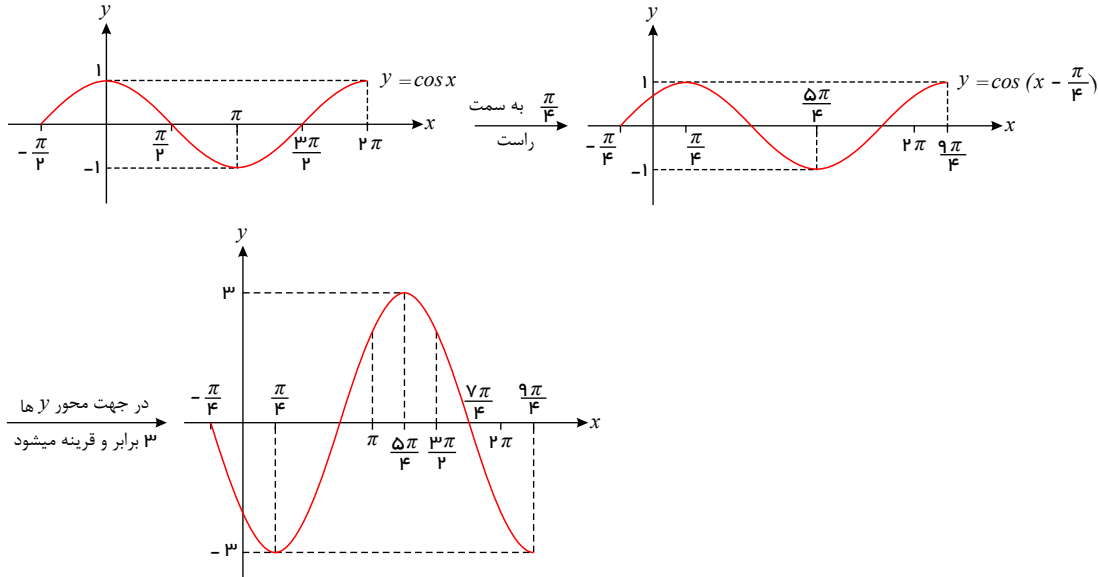
$$f(x) = \sin(x - \frac{3\pi}{4}) - 2 \cos(\frac{7\pi}{4} + x) = -\sin(\frac{3\pi}{4} - x) - 2 \cos(\frac{7\pi}{4} + x)$$



$$\rightarrow f(x) = -\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} - x\right) - 2\cos\left(2\pi - \frac{\pi}{4} + x\right)$$

$$\rightarrow f(x) = -\sin\left(\frac{\pi}{2} - \left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right) - 2\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 2\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\rightarrow f(x) = -3\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$



اگر خط $y = -1$ رسم کنیم در بازه گفته شده نمودار را در سه نقطه قطع می کند، پس گزینه «۴» نادرست است.

ابتدا ضابطه تابع داده شده را ساده می کنیم. (۱) (۲) (۳) (۴) (۳۹)

$$y = a + 2\sin(\pi bx - \frac{\pi}{4}) \rightarrow y = a - 2\sin(\frac{\pi}{4} - \pi bx) \rightarrow y = a - 2\cos(\pi bx)$$

در تابع $y = a \cos bx + c$ دوره تناوب $T = \frac{2\pi}{|b|}$ و $Max = |a| + c$ و $Min = -|a| + c$ است. دوره تناوب تابع داده شده برابر ۶ است.

$$T = \frac{2\pi}{|b\pi|} = 6 \rightarrow \frac{2}{|b|} = 6 \rightarrow b = \pm \frac{1}{3}$$

چون تابع داده شده کسینوس است هر دو مقدار b قابل قبول است.

$$Max = 3 \rightarrow |-2| + a = 3 \rightarrow a = 1$$

$$a - b = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \quad \text{یا} \quad a - b = 1 - (-\frac{1}{3}) = \frac{4}{3}$$

می دانیم در تابع $y = a \sin bx + c$ بیشترین مقدار تابع، برابر $|a| + c$ است. (۱) (۲) (۳) (۴) (۴۰)

$$Max = \sqrt{3} \rightarrow |b| + a = \sqrt{3} \quad \text{چون شکل فرمت خود سینوس است، } b > 0 \text{ است.} \rightarrow b + a = \sqrt{3}$$

$$\left| \begin{array}{l} \pi \\ -\frac{\pi}{2} \end{array} \right| \xrightarrow{\text{صدق در تابع}} -\frac{3}{2} = a + b \sin(\pi + \frac{\pi}{3}) \rightarrow -\frac{3}{2} = a - b \sin \frac{\pi}{3} \rightarrow -\frac{3}{2} = a - \frac{\sqrt{3}}{2}b \rightarrow -3 = 2a - \sqrt{3}b$$

$$\begin{cases} b + a = \sqrt{3} \\ 2a - \sqrt{3}b = -3 \end{cases} \rightarrow -2b - \sqrt{3}b = -2\sqrt{3} - 3 \rightarrow 2b + \sqrt{3}b = 2\sqrt{3} + 3$$

$$\rightarrow (2 + \sqrt{3})b = 2\sqrt{3} + 3 \rightarrow b = \frac{2\sqrt{3} + 3}{2 + \sqrt{3}} \times \frac{2 - \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3} - 6 + 6 - 3\sqrt{3}}{4 - 3} = \sqrt{3}$$

$$y = a + b \cos(\frac{\pi}{4} - x) = a + b \sin x$$

(۱) (۲) (۳) (۴) (۴۱)



$$\left| \frac{-5\pi}{6} \right| \xrightarrow{\text{صدق}} \circ = a + b \sin\left(\frac{-5\pi}{6}\right) \rightarrow \circ = a - b \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)$$

$$\rightarrow \circ = a - b \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) \rightarrow \circ = a - b \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \rightarrow a - \frac{b}{2} = \circ \quad (I)$$

در تابع $y = a \sin bx + c$ مقدار Max تابع از رابطه $|a| + c$ به دست می آید و چون تابع داده شده فرمت سینوس را دارد $ab > 0$ است و چون $y(\circ) > 0$ است پس $a > 0$ است و در نتیجه $b > 0$ است.

$$Max = |a| + c \rightarrow 3 = |b| + a \rightarrow 3 = b + a \quad (II)$$

از روابط (I) و (II) مقادیر $a = 1$ و $b = 2$ حاصل می شوند.

$$\text{پس : } f(x) = 1 + 2 \sin x \rightarrow f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1 + 2\left(\frac{1}{2}\right) = 2$$

پاسخنامه کلیدی

۱	۱	۲	۳	۴
۲	۱	۲	۳	۴
۳	۱	۲	۳	۴
۴	۱	۲	۳	۴
۵	۱	۲	۳	۴
۶	۱	۲	۳	۴
۷	۱	۲	۳	۴
۸	۱	۲	۳	۴
۹	۱	۲	۳	۴
۱۰	۱	۲	۳	۴
۱۱	۱	۲	۳	۴

۱۲	۱	۲	۳	۴
۱۳	۱	۲	۳	۴
۱۴	۱	۲	۳	۴
۱۵	۱	۲	۳	۴
۱۶	۱	۲	۳	۴
۱۷	۱	۲	۳	۴
۱۸	۱	۲	۳	۴
۱۹	۱	۲	۳	۴
۲۰	۱	۲	۳	۴
۲۱	۱	۲	۳	۴
۲۲	۱	۲	۳	۴

۲۳	۱	۲	۳	۴
۲۴	۱	۲	۳	۴
۲۵	۱	۲	۳	۴
۲۶	۱	۲	۳	۴
۲۷	۱	۲	۳	۴
۲۸	۱	۲	۳	۴
۲۹	۱	۲	۳	۴
۳۰	۱	۲	۳	۴
۳۱	۱	۲	۳	۴
۳۲	۱	۲	۳	۴
۳۳	۱	۲	۳	۴

۳۴	۱	۲	۳	۴
۳۵	۱	۲	۳	۴
۳۶	۱	۲	۳	۴
۳۷	۱	۲	۳	۴
۳۸	۱	۲	۳	۴
۳۹	۱	۲	۳	۴
۴۰	۱	۲	۳	۴
۴۱	۱	۲	۳	۴